题关键词：多元隐函数求偏导，空间切平面方程，两平面夹角与法向量夹角之间关系。

题：求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点（-1，-2，3）处的切平面方程和它与 XOY 面的夹角的余弦。

解：令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$，分别求 x,y,z 的偏导 $F_x=6x$，$F_y=2y$，$F_z=2z$,

求切平面方程方法一：

$F_x(-1，-2，3)=6(-1)=-6$，$F_y(-1，-2，3)=2(-2)=-4$，$F_z(-1，-2，3)=2*3=6$

则所求切平面方程为：$-6(x+1)-4(y+2)+6(z-3)=0$，　$3x + 2y - 3z + 16=0$.

求切平面方程方法二：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{6x}{2z}=-3\frac{x}{z},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,-2,3)}=-3*\frac{-1}{3}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,-2,3)}=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3},$$

则所求切平面方程为：$z-3=1(x+1)+\frac{2}{3}(y+2)$，　$3x + 2y - 3z + 16=0$.

取切平面法向量为：$n_1=(3, 2, -3)$，再取 XOY 平面的法向量为：$n_2=(0 ,0, 1)$,

设两向量夹解为γ，$\cos\gamma=\frac{n_1\bullet n_2}{|n_1|\times|n_2|}=\frac{3\times0+2\times0+(-3)\times1}{\sqrt{3^2+2^2+(-3)^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=-\frac{3}{\sqrt{22}}$,

两平面夹角取对应锐角，所以切平面与 XOY 平面夹角余弦为：$\frac{3}{\sqrt{22}}$，夹角为：$\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{22}}\right)$