题：指数分布，期望，随机变量函数期望

某种商品每天的需要量 X 是服从指数分布 Exp(1/200)的随机变量（单位：件）。商店每销售一件商品可获净利润 0.2 元；如果商品未售完，则每处理一件商品净损失 0.1 元。问商店每天应进多少件商品才能使平均收益最大？

解：设商店每天应进 Y 件商品才能使平均收益最大，此时收次为 P，则 $\mathrm{P}=\begin{cases}0.2\mathrm{Y}，\mathrm{X}\geq Y\\ 0.2X-0.1(Y-X)，\mathrm{X}<y\end{cases}$。

X 的密度函数为，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x},X>0.\\ 0,X<0.\end{cases}$

$$\mathrm{E(P)}=\int_0^{+\infty}\mathrm{P}f(x)dx=\int_{\mathrm{Y}}^{+\infty}0.2\mathrm{Y}\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x}dx+\int_0^{Y}\left[0.2X-0.1(Y-X)\right]\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}X}dx=0.2Y(-e^{-\frac{1}{200}x})\big|_Y^{+\infty}$$

$$+0.3\int_0^{\mathrm{Y}}X\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x}dx-0.1\mathrm{Y}\int_0^{\mathrm{Y}}\frac{1}{200}e^{-\frac{1}{200}x}dx=0.2\mathrm{Y}e^{-\frac{1}{200}Y}+0.3\int_0^{Y}xd(-e^{-\frac{1}{200}x})-0.1\mathrm{Y}（-e^{-\frac{1}{200}x})\big|_0^Y$$

$$=0.2\mathrm{Y}e^{-\frac{1}{200}Y}+0.3x(-e^{-\frac{1}{200}x})\big|_0^Y-0.3\int_0^{Y}-e^{-\frac{1}{200}x}dx+0.1\mathrm{Y}e^{-\frac{1}{200}Y}-0.1Y=0.3\mathrm{Y}e^{-\frac{1}{200}Y}-0.3Ye^{-\frac{1}{200}\mathrm{Y}}-60e^{-\frac{1}{200}x}\big|_0^Y$$

$$-0.1Y=-60e^{-\frac{1}{200}Y}+60-0.1\mathrm{Y}$$

$$\frac{dP}{dY}=0.3e^{-\frac{1}{200}Y}-0.1=0，\qquad e^{-\frac{1}{200}Y}=\frac{1}{3},\qquad -\frac{1}{200}Y=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3,\qquad Y=200\ln 3\approx 220$$

综上，每天应进 220 件商品才能使平均收益最大。